IO 3

TD 02

Exo 1 f. On veut montrer que l'application $f : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$
est continue. $(x,y,z) \mapsto x \cdot y \cdot z$

On doit donc montrer que f est continue en tout point $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t.q. $\forall p \in \mathbb{R}^3$ $\|p - p_0\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$.

Soit $p = (x,y,z)$. La condition $\|p - p_0\|_\infty < \delta$ équivaut ~~deux~~ conditions :

$$\begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \\ |z - z_0| < \delta \end{cases}$$

← Remarquons que dans ce cas $|x| < |x_0| + \delta$,
et ~~analogue~~ de façon analogue pour les coordonnées y, z.

On veut estimer : $|xyz - x_0 y_0 z_0|$.

inég. triangulaire

$$|xyz - x_0y_0z_0| \leq |xyz - xyz_0| + |xyz_0 - x_0y_0z_0| + |xy_0z_0 - x_0y_0z_0|$$

$$= |x||y|\underbrace{|z - z_0|}_{\wedge\ \delta} + |x||z_0|\underbrace{|y - y_0|}_{\wedge\ \delta} + |y_0||z_0|\underbrace{|x - x_0|}_{\wedge\ \delta} < \delta \left(|x||y| + |x||z_0| + |y_0||z_0| \right)$$

$$< \delta \left((|x_0| + \delta)(|y_0| + \delta) + (|x_0| + \delta)|y_0| + |y_0||z_0| \right) =: h(\delta)$$

Pour (x_0, y_0, z_0) fixé, la valeur $h(\delta) \to 0$ pour $\delta \to 0$.

On en déduit que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $h(\delta) < \varepsilon$, c'est-à-dire :

~~$\forall \varepsilon > 0$~~ $|xyz - x_0y_0z_0| < h(\delta) < \varepsilon$, qui était l'estimation voulue.

Rmq : Notons que f n'est pas uniformement continue, donc pas Lipschitz.
Une façon pour le dire est que si tout valeur x_0, y_0, z_0 est positif, et
$(x,y,z) = (x_0 + \delta, y_0 + \delta, z_0 + \delta)$, alors $|xyz - x_0y_0z_0| = h(\delta)$.

Pour $\{x_0, y_0, z_0\} \to +\infty$, $h(\delta) \to +\infty$. pour tout $\delta > 0$.

Une autre façon est considérer la diagonale $\Delta = \{x = y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$. alors
$f|_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}$ est donnée par $(x,x,x) \mapsto x^3$.

Si $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x,x,x)$, alors $f \circ i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

Notons que $i : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ est telle que $\|i(x)\|_\infty = |x|$.

On en déduit que si f était uniformément continue, alors $f \circ i : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ serait uniformément continue.

Mais on sait que $x \mapsto x^3$ n'est pas uniformément continue, donc f ne l'est non plus.

Exo 3.

On veut montrer que l'application $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, il faut donc montrer que $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$,
$|x - x_0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Autrement dit, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in \mathbb{R}$, $|x_\delta - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Ou encore que $\exists (x_n)_n$ suite, $x_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x_0$ et $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

- Supposons d'abord que $x_0 \in \mathbb{Q}$, et soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Par définition, $f(x_0) = 1$.

Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Soit $x_\delta \in]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'importe quel point irrationnel. Comme $x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x_\delta) = 0$. Donc $|x_\delta - x_0| < \delta$. Mais $|f(x_\delta) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$, et f n'est pas continue en x_0.

- Supposons que $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et donc $f(x_0) = 0$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Soit $x_\delta \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{Q}$ n'importe quel point rationnel.

Comme $x_\delta \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_\delta) = 1$. Donc $|x_\delta - x| < \delta$ et $|f(x_\delta) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas continue en x_0.

Exo 14 On rappelle que si $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$, et $\|\cdot\|_p$ est la norme subordonnée associée à $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$, pour $p = 1, 2, \infty$, alors on a :

$$\|A\|_1 = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \max_{j=1..n} \|a^j\|_1 \qquad a^j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \text{ j'ème colonne de } A.$$

$$\|A\|_\infty = \|{}^tA\|_1 = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \max_{i=1..n} \|a_i\|_1 , \quad a_i = (a_{i,1} \dots a_{i,n}) \text{ i-ème ligne de } A.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} , \quad \rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } B\}$$

rayon spectrale.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. $\|A\|_1 = \max\{|2| + |-3|, |0| + |1|\} = \max\{5, 1\} = 5$.

$\|A\|_\infty = \max\{|2| + |0|, |-3| + |1|\} = \max\{2, 4\} = 4$

Les valeurs propres pour A satisfont $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ a $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, et les valeurs propres sont $1, 2$.

(facile car A est triangulaire) Donc $\rho(A) = \max\{|1|, |2|\} = 2$.

Calculons $B = {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_B(\lambda) = (13 - \lambda)(1 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 14\lambda + 4$.

Les valeurs propres sont donc donnés par $\lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{1} = 7 \pm 3\sqrt{5}$.

Donc

$\rho(B) = 7 + 3\sqrt{5}$ et $\|A\|_2 = \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$ $(\sim 3{,}7)$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|B\|_1 = \max\{|2|+|1|, |1|+|1|\} = 3.$

$\|B\|_\infty = \|{}^tB\|_1 = \|B\|_1 = 3.$ (car $B = {}^tB$).

Comme B est symétrique, les valeurs propres de ${}^tBB = B^2$ sont les carrés des valeurs propres de B. Il s'en suit que $\rho(B) = \sqrt{\rho(B^2)} = \sqrt{\rho({}^tBB)} = \|B\|_2.$

On calcule les valeurs propres de B:

$P_B(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$

$P_B(\lambda) = 0 \iff \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Donc $\rho(B) = \|B\|_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|C\|_1 = \max\{|2|+|-1|, |3|+|1|\} = 4$

$\|C\|_\infty = \max\{|2|+|3|, |-1|+|1|\} = 5.$

$P_C(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 5.$

Le discriminant de $P_C(\lambda)$ est $9 - 20 = -11.$

Donc les solutions de $P_C(\lambda) = 0$ sont $\lambda = \dfrac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$. $(\lambda_+ = \overline{\lambda_-})$.

Il s'en suit que $\rho(\lambda) = |\lambda| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (\sqrt{11})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$

$${}^tCC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

À changement de coordonnées près $(x,y) \mapsto (y,x)$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est conjugué à B de l'exercice précédent. Donc $\rho({}^tCC) = 5 \cdot \rho(B) = 5 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$

et $\|C\|_2 = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$ $\left(= \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \sim 3,6 \right)$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad \|D\|_1 = \max\{2, 5, 1\} = 5$

$\|D\|_\infty = \max\{3, 4, 1\} = 4$

Notons que D est une matrice à blocs $D = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}}^{A} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'en suit que • $\underbrace{\text{Valeurs Propres}}_{\text{Spec}}$ $\quad \mathrm{Spec}(D) = \mathrm{Spec}(A) \cup \{-1\}$.

${}^tDD = \begin{pmatrix} {}^tAA & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda \mid p_A(\lambda) = 0\}$. $\quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 =$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 5$. $\quad$ le discriminant est $\frac{\Delta}{4} = 4 - 5 = -1$.

⇝ les solutions sont $\lambda = 2 \pm i$, et $\rho(A) = |\lambda| = \sqrt{5}$.

$\rho(D) = \max\{1, \rho(A)\} = \sqrt{5}$.

Calculons : $\underbrace{{}^tAA}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}$.

$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(13-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 15\lambda + 25$. $\quad$ Le discriminant est

$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 25 = 125 > 0$. ⇝ $\mathrm{Spec}(B) = \left\{ \frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{2} \right\}$.

et $\rho(B) = \max\left\{1, \frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}\right\} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}$.

Donc $\|D\|_2 = \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad \|E\|_1 = 1$. $\quad \|E\|_\infty = 1$.

Notons que E est associée à la permutation des coordonnées :

$(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$. $\quad$ Donc $E^3 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il s'en suit que les valeurs propres de E sont des racines 3-èmes de l'unité, et $\rho(E) = 1$.

Calculons ${}^tE \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I$.

En effet ${}^tE = E^{-1}$, car associée à la permutation $(x,y,z) \mapsto (y,z,x)$.

Il s'en suit que $\rho({}^tEE) = 1$ et $\|E\|_2 = \sqrt{1} = 1$.

f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|F\|_1 = \max\{0, 1, 4\} = 4 \quad \|F\|_\infty = \max\{4, 1, 0\} = 4$.

Notons que $\mathrm{Spec}(F) = \{0\}$, donc $\rho(F) = 0$

(en particulier le rayon spectral n'est pas une norme sur $M_n(\mathbb{R})$).

Calculons ${}^tFF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Spec}({}^tFF) = \{0\} \cup \mathrm{Spec}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}}_{= A}$.

$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(10-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 11\lambda + 1$. ~~Spec(A) =~~

Le discriminant est $\Delta = 11^2 - 4 = 117$. Donc $\mathrm{Spec}(A) = \left\{ \frac{11 \pm \sqrt{117}}{2} \right\}$

Il s'en suit que $\rho({}^tFF) = \rho(A) = \frac{11 + \sqrt{117}}{2} = \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}$.

et $\|F\|_2 = \sqrt{\frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}}$ $\left(= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3{,}3 \right)$

Exo 17, f. On veut calculer $\|\varphi\|_{op}$, $\varphi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

$(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Par définition, $\|\varphi\|_{op} = \max\limits_{\|(a,b)\|_1 = 1} \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\|_\infty$.

$\|(a,b)\|_1 = |a| + |b|$, $\quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|a|, |b|, |-b|, |a|\} = \max\{|a|, |b|\}$
$= \|(a,b)\|_\infty$.

On sait que $\|(a,b)\|_\infty \leq \|(a,b)\|_1 (= 1)$, avec égalité si a ou $b = 0$.

Donc $\|\varphi\|_{op} = 1$.

Exo 17.

b) $\varphi : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$,

$$(x,y,z) \mapsto (x+y,\ y+z,\ x+z)$$

On veut calculer $\|\varphi\|_{op} = \max\limits_{\|(x,y,z)\|_1=1} \|\varphi(x,y,z)\|_\infty$.

$\|(x,y,z)\|_1 = |x|+|y|+|z|$.

$\|\varphi(x,y,z)\|_\infty = \|(x+y,\ y+z,\ x+z)\|_\infty \leq \max\{|x+y|,\ |y+z|,\ |x+z|\}$

$\leq \max\{\underbrace{|x|+|y|}_{\leq |x|+|y|+|z|},\ \underbrace{|y|+|z|}_{\leq |x|+|y|+|z|},\ \underbrace{|x|+|z|}_{\leq |x|+|y|+|z|}\} \leq |x|+|y|+|z| = \|(x,y,z)\|_1 = 1$

Donc $\|\varphi\|_{op} \leq 1$.

Mais si $(x,y,z) = (1,0,0)$, alors $\|(1,0,0)\|_1 = 1$ et

$\max\{|1+0|;\ |0+0|,\ |1+0|\} = 1$. Donc $\|\varphi\|_{op} = 1$.

QdC:

a) Soit E, F espaces métriques (avec distances d_E, d_F) et $f : E \to F$ applications. Alors f est continue en $x_0 \in E$ si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ t.q. $\forall x \in E,\ d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Def façon équivalente : si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in E$ telle que $\underset{\text{distance } d_E}{x_n \to x_0}$,

alors $\underset{\text{distance } d_F}{f(x_n) \to f(x_0)}$.

h) Dans le cadre du point a), f est dite continue si f est continue en tout point $x_0 \in E$.

f) Soient V, W espaces vectoriels normés (avec normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$).
Soit $f : V \to W$ une application linéaire (continue).
Alors la norme subordonnée $\|f\|_{op}$ de f ~~pour~~ est donnée par :

$$\|f\|_{op} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V = 1} \|f(v)\|_W .$$